



TITLE:

# 力学系におけるStabilityと Genericityについて (力学系の総合 的研究)

AUTHOR(S):

池上, 宜弘

---

CITATION:

池上, 宜弘. 力学系におけるStabilityとGenericityについて (力学系の総合的研究). 数理解析研究所講究録 1973, 173: 58-73

ISSUE DATE:

1973-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107049>

RIGHT:

# 力学系における *Stability* と *Genericity* について

名大 教養 池上 宜弘

## § 1. 序

力学系の *Stability* と *Genericity* に関する現在まで得られている主要な結果に著者の出した結果や注意も織りまぜて説明する。

$M$  を境界のない smooth な多様体とし  $\mathcal{D}^r(M)$  を  $M$  上の  $C^r$  級の diffeomorphism 全体,  $\mathcal{X}^r(M)$  を  $C^r$  級の vector field (flow) 全体とする.  $\mathcal{D}^r(M)$ ,  $\mathcal{X}^r(M)$  には  $C^r$  Whitney topology を入れておく. ( $M$  が compact のとき, これは  $C^r$  uniform topology と同じである.) 以後  $\mathcal{D}^r(M)$  又は  $\mathcal{X}^r(M)$  を  $M$  上の力学系の空間といい  $\text{Dyn}(M)$  であらわすことにする. 又  $r \geq 1$  とする.

10 年以前までの力学系に関する Smale の目的は次のようなものであった. (i)  $\text{Dyn}(M)$  の中に open dense な set  $U$  をみつけること. (ii)  $U$  の中の element (又は適当な equivalence に関する class) を何か discrete numerical なりして代数的に保存

量で表現すること。しかし適当と思われる  $U$  が定義されては次にそれが *dense* でないことが示されてきた。そこで / 箇の適当な  $U$  を積極的に探すことはやめて、適当な open subset の列

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots \subset U_n \subset \text{Dyn}(M)$$

を見出していく方向が適当と思われる。事実、最近 Smale も次のように云っている。

上のような  $U_i$  の列を見出し、それは次の条件をみたすようなものであること、

- (i) 列の長さ  $n$  はあまり大きくないこと。
- (ii)  $U$  は open 又は少なくともある open set の Baire subset であること。
- (iii)  $n$  が大きくなれば  $U_i$  力学系の広い class を含むこと。一方  $n$  が小さくなれば  $U_i$  に含まれる力学系は詳しく構造が分るようなものであること。従って  $U_n$  にはあまり強い *stability property* は期待できない。

## § 2. $\text{Dyn}(M)$ の部分集合の定義.

力学系では orbit の研究が重要であるから、2 つの力学系の間の同値関係は次の *topologically equivalence* がよく使われて来た。すなわち 2 つの力学系が topologically equivalent ( $\sim$ ) で

あるとは homeomorphism  $h: M \rightarrow M$  が存在して, 一方の力学系の任意の orbit は  $h$  により他方の力学系の 1 つの orbit の上に方向を保ってうつされることをいう. すなわち

$$f, g \in \mathcal{D}^r(M) \text{ のとき } \quad h f = g h,$$

$$X, Y \in \mathcal{X}^r(M) \text{ のとき } \quad h(c_+(x, X)) = c_+(h(x), Y).$$

ただし  $\varphi_x(x, t)$  を積分曲線とするとき,  $c_+(x, X) = \{\varphi_x(x, t) \mid t \geq 0\}$  とする.

$f \in \mathcal{D}^r(M)$  の invariant set  $\Lambda$  が hyperbolic であるとは  $\Lambda$  上の  $M$  の tangent bundle の連続な splitting  $T_\Lambda(M) = E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^s$  が存在して次の条件を満たすことである.

- (i)  $E_\Lambda^u, E_\Lambda^s$  は  $f$  の微分  $Tf$  に関して invariant,
- (ii)  $C > 0$  と  $0 < \tau < 1$  が存在して, 任意の  $n \in \mathbb{Z}_+$  (自然数) に対して  $\max\{\|Tf^n|E_\Lambda^s\|, \|Tf^{-n}|E_\Lambda^u\|\} < C\tau^n$ . 但し  $\|\cdot\|$  は与えられた Riemannian metric に関する norm とする.

$X \in \mathcal{X}^r(M)$  の invariant set  $\Lambda$  ( $\varphi_x(\Lambda, t) \subset \Lambda, \forall t$ ) が hyperbolic であるとは連続な splitting  $T_\Lambda(M) = E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$  が存在して次の条件を満たすことである.

- (i)  $E_\Lambda^u, E_\Lambda^s$  そして  $E_\Lambda^c$  は  $T\varphi_x(\cdot, t)$  に関して invariant,
- (ii)  $E_\Lambda^c$  は  $X_x$  によって張られる,
- (iii)  $C > 0$  と  $0 < \tau < 1$  が存在して, 任意の  $t > 0$  に対して  $\max\{\|T\varphi_x(\cdot, t)|E_\Lambda^s\|, \|T\varphi_x(\cdot, -t)|E_\Lambda^u\|\} < C\tau^t$ .

$d(\cdot, \cdot)$  は  $M$  の

metric と

する.  $x \in M$  を通る  $f \in \mathcal{D}^r(M)$  の stable manifold  $W_f^s(x)$ , unstable manifold  $W_f^u(x)$  は次に与えられる  $M$  の subset である.

$$W_f^s(x) = \{ y \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \},$$

$$W_f^u(x) = \{ y \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0 \}.$$

$x, \gamma$  を各々  $X \in \mathcal{X}^r(M)$  の fixed point, closed orbit とする.  $x, \gamma$  の stable manifold, unstable manifold は次のように定義される.

$$\begin{cases} W_x^s(x) = \{ y \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_x(y, t) = x \}, \\ W_x^u(x) = \{ y \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_x(y, t) = x \}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_x^s(\gamma) = \{ y \in M \mid \varphi_x(y, t) \rightarrow \gamma \text{ as } t \rightarrow \infty \}, \\ W_x^u(\gamma) = \{ y \in M \mid \varphi_x(y, t) \rightarrow \gamma \text{ as } t \rightarrow -\infty \}. \end{cases}$$

(2.1). (Hirsch, Pugh, [1]).  $\Lambda$  を  $f \in \mathcal{D}^r(M)$  の closed hyperbolic invariant set とすれば連続写像  $\psi: E_\Lambda^s \rightarrow M$  が存在して  $x \in \Lambda$  に対して  $\psi|_{E_x^s}$  は injective  $C^r$  immersion で  $\psi(0_x) = x$ ,  $\psi(E_x^s) = W_x^s(x)$ .

(2.2). [13].  $x, \gamma$  を  $X \in \mathcal{X}^r(M)$  の各々 hyperbolic な fixed point, closed orbit とすれば, これ等の  $W^s$ ,  $W^u$  は injective  $C^r$  immerse である manifold である.

$\Omega = \Omega(f)$  が  $f$  の non-wandering set であるとは, 任意の  $x \in \Omega$  と任意の  $x$  の近傍  $U$  に対して  $n \in \mathbb{Z}_+$  が存在して  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$  が成立することである.  $\Omega = \Omega(X)$  が  $X \in \mathcal{X}(M)$  の non-

wandering set であるとは, 任意の  $x \in \Omega$  と任意の  $x$  の近傍  $U$  と任意の  $t_0 > 0$  に対して  $|t| > t_0$  なる  $t$  が存在して  $\varphi(U, t) \cap U \neq \emptyset$  が成立することである. ( $M$  が open manifold の場合は  $\varphi(x, t)$  が定義されるような  $t$  の範囲で考える).  $\Omega$  は closed invariant set である.

$f \in \mathcal{D}(M)$  が Axiom A を満たすとは,  $f$  が次を満たすことである.

- a)  $\Omega(f)$  は hyperbolic,
- b)  $\Omega(f)$  の中に periodic point が dense に存在する.

$X \in \mathcal{X}(M)$  が次を満たすとき  $X$  は Axiom A を満たすという.

- a)  $\Omega(X)$  は hyperbolic
- b)  $\Omega(X)$  の中に fixed point 又は closed orbit が dense にある.

Axiom A を満たす力学系が transversality condition を満たすとは periodic point; fixed point, closed orbit の  $W^s$  と  $W^u$  が互に transversal に交わることである. (例えば  $W^s(x)$  と  $W^u(y)$ ,  $W^s(x)$  と  $W^u(y)$ ,  $W^s(x)$  と  $W^u(x')$  等.) Axiom A を満たす力学系  $f \in \mathcal{D}(M)$  が strong transversality property を持つとは, 任意の  $x \in M$  に対し  $W_f^s(x)$  と  $W_f^u(x)$  が成立することである.

(2.1)により上の  $W^s, W^u$  は local に manifold であるから上は well-defined である.

(2.3). (Spectral decomposition theorem [15], [10]). 力学系が Axiom A を満たしていれば次の意味で一意的な分解  $\Omega =$

$\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$  が存在する. (i)  $\Omega_i$  は closed invariant, (ii)  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ), (iii)  $\Omega_i$  は topologically transitive ( $\exists x \in \Omega_i$ ,  $x$  の orbit は  $\Omega$  の中で dense.)

力学系が Axiom A を満たして  $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$  を spectral decomposition とすると  $\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_h}$  が cycle であるとは,  $h > 1$  で  $W^s(\Omega_{i_j}) \cap W^u(\Omega_{i_{j-1}}) \neq \emptyset$  ( $j = 2, \dots, h$ ),  $W^s(\Omega_{i_1}) \cap W^u_{i_h} \neq \emptyset$  が成立することである. (但し,  $W^s(\Omega) = \bigcup_{x \in \Omega} W^s(x)$ ,  $W^u(\Omega)$  も同様.)  
力学系に cycle が存在しないとき no cycle property を持つという.

$\Omega$  が finite type とは,  $f \in \mathcal{D}(M)$  のとき  $\Omega(f)$  が有限集合のこととて  $X \in \mathcal{X}^r(M)$  のとき  $\Omega(X)$  が有限箇の fixed point や closed orbit から成ることとする.

次に  $\text{Dyn}(M)$  の 4 つの部分集合を定義する.

$U_1 = \{ \text{Axiom A を満たし, } \Omega \text{ が finite type で transversality condition を満たす力学系 (の全体)} \} \subset \mathcal{D}(M) \text{ または } \mathcal{X}(M).$

$U_2(\mathcal{D}) = \{ f \in \mathcal{D}^r(M) \mid f \text{ は Axiom A を満たし strong transversality condition を満たす.} \},$

$U_3 = \{ \text{Axiom A と no cycle condition を満たす力学系} \},$

$U_4 = \{ \text{fixed point, closed orbit; periodic point が hyperbolic である力学系} \}.$

力学系が structurally stable であるとは,  $\text{Dyn}(M)$  の中の近傍が存在してその中の力学系は全て topologically equivalent であること. 2つの力学系が  $\Omega$ -equivalent であるとは, それ等の non-wandering set  $\Omega_1, \Omega_2$  に対して homeomorphism  $h: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  で任意の orbit を他方の1つの orbit の上に方向を保つようなものが存在することである. ( $\sim_\Omega$  で示す).

ある力学系が  $\Omega$ -stable であるとは  $\text{Dyn}(M)$  での近傍が存在してその中の力学系はすべて  $\Omega$ -equivalent であること.

dense な open set の候補として次に stability の弱い概念を導入してみる.

定義  $f, g \in \text{Dyn}(M)$  とする.  $g$  の任意の近傍  $V_g$  に対して  $f$  の近傍  $U_f$  が存在して,  $f' \in U_f$  ならば  $f'$  と topologically equivalent な  $g'$  が  $V_g$  の中に存在するとき,  $f \simeq g$  であらわすことにする. 又,  $f \simeq g$  で  $g \simeq f$  のとき  $f \simeq g$  であるとする. 又上の定義において topologically equivalence の代りに  $\Omega$ -equivalence を使うことにより同様に  $f \simeq_\Omega g$  を定義する.

◎  $\sim, \sim_\Omega, \simeq, \simeq_\Omega$  は equivalent relation である.

定義  $f \in \text{Dyn}(M)$  が weakly stable (weakly  $\Omega$ -stable) であるとは,  $f$  の近傍が存在して, その中の任意の  $g$  に対して  $f \simeq g$  ( $f \simeq_\Omega g$ ) が成立することである.



次に  $\text{Dyn}(M)$  の種々の部分集合を定義する.

$\mathcal{U}_F = \{ \text{structurally stable で } \Omega \text{ が finite type の力学系} \},$

$\mathcal{U}_A = \{ \text{Anosov であるような力学系} \},$  (Anosov の定義については次の白岩さんの講演を参考にしたい.)

$\mathcal{U}_S = \{ \text{structurally stable な力学系} \},$

$\mathcal{U}_\Omega = \{ \Omega\text{-stable な力学系} \},$

$\mathcal{U}_S^* = \{ \text{weakly stable な力学系} \},$

$\mathcal{U}_\Omega^* = \{ \text{weakly } \Omega\text{-stable な力学系} \}.$

$\mathcal{U}_i$  や  $\mathcal{U}_j$  等を持ち  $\mathcal{X}(M)$  や  $\mathcal{D}(M)$  の中に指定したいとき, 今後これに  $\mathcal{U}_i(\mathcal{X})$  や  $\mathcal{U}_i(\mathcal{D})$  で示す. 又微分可能性の  $C^r$  を指定したいとき  $\mathcal{U}_i^r$  等以示す.

### § 3. $\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_j$ の性質と関係.

#### 1°. 包含関係.

(3.1). 次の実線の部分の包含関係が成立することは明らか.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{U}_1 & \subsetneq & \mathcal{U}_2 & \overset{(3.5)}{\subsetneq} & \mathcal{U}_3 & \subset & \mathcal{U}_4 \\
 \vdots (3.2) & & \cap (3.3) & & \cap (3.4) & & \cap (3.6) \\
 \mathcal{U}_F & \subsetneq & \mathcal{U}_S & \subset & \mathcal{U}_\Omega & & \\
 & \subsetneq (3.7) & \cap & & \cap & & \\
 \mathcal{U}_A & & \mathcal{U}_S^* & \subset & \mathcal{U}_\Omega^* & & 
 \end{array}$$

(3.1).  $U_1(\mathcal{D})$  と  $U_1(\mathcal{X})$  は non-empty である. 実際, gradient flow と gradient flow の time-1-map を考えればよい.

(3.2). (Palis, Smale [1]).  $M$  が compact で  $1 \leq r \leq \infty$  ならば  $U_1^r = V_F^r$ .

(3.3). (Robbin [11]).  $M$  が compact,  $r \geq 2$  とするとき  $U_2^r(\mathcal{D}) \subset V_S^r(\mathcal{D})$ .

(3.4). (Smale [1]).  $M$  が compact  $1 \leq r < \infty$  とするとき,  $U_3^r(\mathcal{D}) \subset V_\Omega^r(\mathcal{D})$ .

(3.4'). (Pugh, Shub [10]).  $M$  が compact  $1 \leq r$  とするとき,  $U_3^r(\mathcal{X}) \subset V_\Omega^r(\mathcal{X})$ .

(3.5). (Palis [1]).  $M$  が compact  $1 \leq r$  とするとき  $f \in \mathcal{D}^r(M)$  が Axiom A を満たし  $\Omega$ -stable ならば  $\Omega(f)$  は no cycle property を持つ. 従って (3.3) を使えば  $2 \leq r$  で  $U_2^r(\mathcal{D}) \subset U_3^r(\mathcal{D})$  が成立することが分る. ( $r = 1$  でも証明できる.)

(3.6). (Franks [2]).  $r = 1$  のとき,  $V_\Omega^1(\mathcal{D}) \subset U_4^1(\mathcal{D})$ .

(3.6').  $V_\Omega^1(\mathcal{X}) \subset U_4^1(\mathcal{X})$  も証明できる.

(3.7). ([0], [5]).  $V_A^r(\mathcal{D}) \subset V_S^r(\mathcal{D})$ ,  $r \geq 1$ .

## 2°. Openness.

(3.8). (i)  $V_F$ ,  $V_S$ ,  $V_\Omega$ ,  $V_S^*$ ,  $V_\Omega^*$  は  $\text{Dyn}(M)$  の中で open. 従って  $U_1$  も open. (ii) 従って  $U_3$ ,  $V_\Omega$  は  $U_4$  の内点  $\text{int } U_4$  に含まれる.

(iii)  $\mathcal{V}_A^r(\mathcal{Q})$  は  $\mathcal{D}^r(M)$  の open subset ([0], [5]),  $r \geq 1$ .

(3.9) 定理.  $\mathcal{V}_S^* - \mathcal{V}_S$ ,  $\mathcal{V}_\Omega^* - \mathcal{V}_\Omega$  は  $\text{Dyn}(M)$  の open subset である.

証明.  $f \in \mathcal{V}_S^* - \mathcal{V}_S$  とする.  $f$  の近傍  $U$  が存在して,  $\forall g \in U$  に対して  $f \simeq g$ .  $\exists g \in U$ ,  $f \simeq g$  であるが  $f \neq g$ .  $g \rightsquigarrow f$  より  $f$  は structurally stable ではない.  $\forall h \in U$  に対し  $f \rightsquigarrow h$  であるから  $h$  は structurally stable ではない.  $\mathcal{V}_\Omega^* - \mathcal{V}_\Omega$  についても同様.

### 3°. Density.

$\text{Dyn}(M)$  のある Baire set に対して成立するような性質を generic property といふ.

(3.10). (Kupka-Smale theorem [4], [13]). 次の性質は generic.

(i) 全ての periodic point; singular point, closed orbit は hyperbolic.

(ii) 全ての periodic point; singular point, closed orbit の  $W^s$ ,  $W^u$  は互に transversally に交わる.

(注意) Kupka, Smale は  $M$  が compact のときを証明し, Peixoto [8] は  $M$  が noncompact のとき  $\mathcal{X}^r(M)$  について証明した. しかし,  $M$  が noncompact のとき  $\mathcal{D}^r(M)$  についても証明できる.

(3.11) [6].  $M = S^1$  のとき  $\mathcal{V}_S^r(\mathcal{Q})$  は  $\mathcal{D}^r(S^1)$  の dense subset,  $1 \leq r \leq \infty$ .

◎  $M = \mathbb{R}$  のときは任意の  $\mathcal{V}_S(\mathcal{Q})$  は  $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$  の中で

dense である事は簡単に証明できる。(自岩).

(3.12). (Peixoto [7]).  $M^2$  が compact 2 次元 manifold のとき  $\mathcal{V}_S^r(\mathcal{X})$  は  $\mathcal{X}^r(M^2)$  の dense subset である,  $1 \leq r \leq \infty$ .

(3.13) (Peixoto, Pugh [9]).  $M$  が 2 次元以上で noncompact のとき  $\mathcal{V}_S^r(\mathcal{X})$  は  $\mathcal{X}^r(M)$  の中で dense ではない,  $1 \leq r \leq \infty$ .

(3.14). 特殊な manifold に関する  $\mathcal{V}_S$  の nondensity.

(1) (Smale [14])  $\mathcal{C}\mathcal{V}_S^r(\mathcal{D}) \neq \mathcal{D}^r(T^3)$ , 但し  $\mathcal{C}$  は closure を,  $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$  を示す. ある compact 4-manifold  $M^4$  が存在して  $\mathcal{C}\mathcal{V}_S^r(\mathcal{X}) \neq \mathcal{X}^r(M^4)$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ .

(2) (Williams [1]).  $\mathcal{C}\mathcal{V}_S^r(\mathcal{D}) \neq \mathcal{D}^r(T^2)$ ,  $\exists$  compact  $M^3$ ,  $\mathcal{C}\mathcal{V}_S^r(\mathcal{X}) \neq \mathcal{X}^r(M^3)$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ .

(3) (Newhouse [1]).  $\mathcal{C}\mathcal{V}_S^r(\mathcal{D}) \neq \mathcal{D}^r(S^2)$ ,  $2 \leq r \leq \infty$ . (この論文の中で  $\mathcal{C}\mathcal{V}_\Omega^r(\mathcal{D}) \neq \mathcal{D}^r(S^2)$  も成立すると注意しているが証明は書かれている。— 証明は大変に複雑であると N. 氏 へ 言 っ て い る。)

(注意) (1), (2) はもっと強い意味での structurally stable の non-density を証明しているが, Kupka-Smale の定理を使えば, これ等の construction はそのまま我々の structurally stable の意味でも non-density を示していることが分る。

(3.15) 特殊な manifold に関する  $\mathcal{V}_\Omega$  の non-density (従って  $\mathcal{V}_S$  の nondensity).

(1). (Abraham-Smale [1])  $\mathcal{C}\mathcal{V}_\Omega^r(\mathcal{D}) \neq \mathcal{D}^r(T^2 \times S^2)$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ .

(2) (Hirsch, Pugh, Shub [3]).  $\mathcal{D}^r(T^4)$  の中には nonempty open set が存在してその中の diffeomorphism は topologically transitive であるが  $\Omega$ -stable ではない,  $1 \leq r < \infty$ .

(3) (Simon [12])  $1 \leq r \leq \infty$  とする. (i)  $f \in \mathcal{D}(M)$  に対し  $N_n(f) = (f^n \text{ の fixed point の箇数})$  とする.  $\mathcal{D}^r(T^3)$  の中には次のような open set  $U$  が存在する.  $f \in U$  ならば  $f$  の任意の近傍  $V$  に対して  $g \in V$  と  $n \in \mathbb{Z}_+$  が存在して  $N_n(f) \neq N_n(g)$  をみたす. (従って  $U$  の元は  $\Omega$ -stable でない). (ii) 次のような countable set  $\{h_j\} \subset \mathcal{D}^r(T^3)$  と Baire subset  $B \subset \mathcal{D}^r(T^3)$  は存在しない; すなわち,  $B$  の中の任意の  $f$  はどれか 1 つの  $h_j$  と  $\Omega$ -equivalent である. (即ち Baire subset を採ってその中で  $\Omega$ -equivalence を分類することは不可能である)

(3.16) 定理 (i)  $S'$  上では  $\mathcal{V}_\Omega^*(\mathcal{Q}) = \mathcal{V}_\Omega(\mathcal{Q})$ ,  $\mathcal{V}_S^*(\mathcal{Q}) = \mathcal{V}_S(\mathcal{Q})$ .  
 (ii) compact 2-manifold 上では  $\mathcal{V}_\Omega^*(\mathcal{X}) = \mathcal{V}_\Omega(\mathcal{X})$ ,  $\mathcal{V}_S^*(\mathcal{X}) = \mathcal{V}_S(\mathcal{X})$ .

証明. (3.9) により  $\mathcal{V}_\Omega^* - \mathcal{V}_\Omega$ ,  $\mathcal{V}_S^* - \mathcal{V}_S$  は openset. - 方 (3.11), (3.12) により  $\mathcal{V}_S$  は  $\text{Dyn}(M)$  の中の dense subset, 従って  $\mathcal{V}_\Omega$  も dense subset であるから定理は明らか.

(3.17) 定理. 任意の 2 次元以上の manifold  $\overset{M}{V}$  と任意の  $2 \leq r < \infty$  に対して  $\mathcal{V}_S^r(\mathcal{Q})$  は  $\mathcal{D}^r(M)$  の dense subset ではない.

証明 (3.14) (3) の中で Newhouse が作っている diffeomorphism  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を使う.  $f$  は  $\mathcal{D}^r(\mathbb{R}^2)$  の中に structurally stable であるようなものから成る近傍を持つ.  $\mathbb{R}^2 \subset M$  と考えて  $f$  は isotopic to identity である事に注目して, よく使われる定理である asymptotically stable invariant manifold theorem の条件をみたすように  $f$  を  $F: M \rightarrow M$  に拡張する. 即ち  $\mathbb{R}^2$  のまわりの  $M$  の真は  $F$  により十分速く  $\mathbb{R}^2$  に近付くようにする. このような  $F$  の perturbation  $G$  は  $\mathbb{R}^2$  の近くには invariant manifold  $R_G^2$  で  $\mathbb{R}^2$  と diffeomorphic なものを持つ.  $G \mapsto R_G^2$  の連続性や Kupka-Smale の定理を使う議論をすることにより (3.17) は証明される.

(3.18) 定理 任意の 3 次元以上の manifold  $M$  と任意の  $2 \leq r < \infty$  に対して  $\mathcal{U}_5^r(\mathcal{X})$  は  $\mathcal{X}^r(M)$  の dense subset ではない.

証明  $\dim M = n$  とするとき, (3.17) を  $(n-1)$ -disk  $D^{n-1}$  に適用して structurally stable なものから成る近傍を持つ  $f: D^{n-1} \rightarrow D^{n-1}$  を得る. 次に suspension を使って  $D^{n-1} \times S^1$  上の flow  $\varphi$  を得る.  $D^{n-1} \times S^1 \subset M^n$  と考えて  $\varphi$  を  $M$  上の flow  $\psi$  に拡張する.  $\psi$  の作り方と Kupka-Smale の定理を使って  $\psi$  の近傍で structurally unstable であるものからなるものを得る.

(3.19) 定理. 任意の2次元以上の manifold と任意の  $2 \leq r < \infty$  に対して  $\mathcal{U}_4^r(\mathcal{D})$  の内点の集合は  $\mathcal{D}^r(M)$  の真部分集合である.

(3.20) 定理. 任意の3次元以上の manifold と任意の  $2 \leq r < \infty$  に対して  $\mathcal{U}_4^r(\mathcal{X})$  の内点の集合は  $\mathcal{X}^r(M)$  の真部分集合である.

証明は各々 (3.17), (3.18) の construction をそのまま使い, 「periodic point  $x$  に対し  $W_f^s(x)$  と  $W_f^u(x)$  が接するならば  $f$  の perturbation  $g$  が存在して  $g$  は  $x$  のいくらでも近くに hyperbolic でない periodic point を持つようにできる」ことを証明することによってなされる.

(3.21) 定理.  $M$  を compact,  $1 \leq r \leq \infty$  とするとき  $\mathcal{V}_5^{*r}(M) \subset \mathcal{U}_4^r(\mathcal{D})$  である.

(3.22) 定理.  $M$  を compact,  $1 \leq r \leq \infty$  とするとき  $\mathcal{V}_5^{*r}(M) \subset \mathcal{U}_4^r(\mathcal{X})$  である.

(3.19) と (3.21), (3.20) と (3.22) から次の定理 (3.23), (3.24) を得る.

(3.23) 定理. 任意の compact な2次元以上の manifold  $M$  と

$2 \leq r < \infty$  に対して,  $U_S^{*r}(\Omega)$  は  $\Omega^r(M)$  の真部分集合である.

(3.24) 定理. 任意の compact な 3 次元以上の manifold  $M$  と  $2 \leq r < \infty$  に対して,  $U_S^{*r}(\Sigma)$  は  $\Sigma^r(M)$  の真部分集合である.

(3.21), (3.2) を使って次も証明できる.

(3.25) 定理.  $f$  を compact manifold  $M$  上の diffeomorphism とする.  $\Omega(f)$  が finite set とする. このとき  $f$  が weakly stable ならば  $f$  は structurally stable である.

### References

- [0] D.V. Anosov, Geodesic flows on compact Riemann manifolds of negative curvature, Proc. Steklov Math Inst., 90 (1967).
- [1] Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math. vol. 14, AMS, 1970 (Proceedings of the Summer Inst. on Glob. Ana., Berkeley.)
- [2] J. Franks, Necessary condition for stability of diffeomorphisms, Trans. AMS. Vol. 158 (1971), 301-308.
- [3] Hirsch, Pugh and Shub, Invariant manifolds, Bull. AMS. vol. 76 (1970), 1015-1019.
- [4] I. Kupka, Contribution à la théorie des champs géné-



- riques, Contributions Diff. Eq. vol. 2 (1963), 457-484,  
vol. 3 (1964), 411-420.
- [5] J. Moser, On a theorem of Anosov, J. Diff. Eq. vol. 5 (1969),  
411-440.
- [6] Z. Nitecki, Differentiable Dynamics, M.I.T. Press, (1971).
- [7] M.M. Peixoto, Structural stability on two-dimensional mani-  
folds, Topology vol. 1 (1962), 101-120.
- [8] —, On approximation theorem of Kupka and Smale,  
J. Diff. Eq. vol. 3 (1966), 214-227.
- [9] Peixoto and Pugh, Structurally stable systems on open manif.  
are never dense, Ann. of Math. vol. 87 (1968), 423-430.
- [10] Pugh and Shub, The  $\Omega$ -stability theorem for flows, Invent.  
Math. vol. 11 (1970), 150-158.
- [11] J.W. Robbin, A structural stability theorem, Ann. of Math.  
vol. 94 (1971), 447-493.
- [12] C. P. Simon, On a classification of a Baire set ..., Bull. AMS.  
vol. 77 (1971), 783-787.
- [13] S. Smale, Stable manif. for diff. eq. ..., Ann. Scuola Normale 18 (1963).
- [14] —, Structurally stable systems are not dense, Ann. J. Math.  
vol. 88 (1966), 491-496.
- [15] —, Diff. Dynamical Systems, Bull. AMS. 73 (1967), 747-817.